වර්ගජ ශ්‍රිත හා වර්ගජ සමීකරණ

* ax^2+bx+c වර්ගජ සමීකරණයට අනුව,

- $a>0$ නම් (වර්ගජ පදයේ සංගුණකය ධන නම්) ශ්‍රිතය අවමයකි.

- $a<0$ නම් (වර්ගජ පදයේ සංගුණකය සෘණ නම්) ශ්‍රිතය උපරිමයකි.

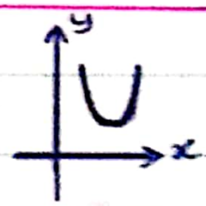
- $b^2-4ac>0$ නම්, ශ්‍රිතයට එකිනෙකට වෙනස් ශූන්‍ය ලක්ෂ්‍ය 2 ක් පවතී.

- $b^2-4ac=0$ නම්, ශ්‍රිතයේ ශූන්‍ය ලක්ෂ්‍ය සමපාත වේ. (එනම් x අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි)

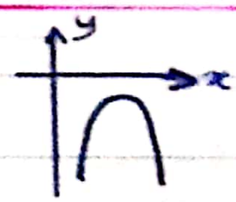
- $b^2-4ac<0$ නම්, ශ්‍රිතයට ශූන්‍ය ලක්ෂ්‍ය නොපවතී. (එනම් x අක්ෂය ඡේදනය නොකරයි)

- $x=-b/2a$ මගින් සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය ලැබෙයි.

$a>0$ හා $b^2-4ac<0$ නම්, සියලු $x\in R$ සඳහා $y>0$ වේ.



$a<0$ හා $b^2-4ac<0$ නම්, සියලු $x\in \mathbb{R}$ සඳහා $y<0$ වේ.



උදා:- 1) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

I ක්‍රමය

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 36 - 4(1)(9)$

$\Delta = 0$

$a > 0$ හා $b^2 - 4ac = 0$ නිසා,

$f(x) \geq 0$

* ∴ මෙය සෘණ නොවන ශුන්‍යත්වය සමත්වය ගනී.

II ක්‍රමය

$f(x) = x^2 - 6x + 9$

$f(x) = (x-3)^2 \geq 0$

∴ සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$ වේ.

* මෙයට සෘණ නොවන ශුන්‍යත්වය සමත්වය ගනී.

2) $f(x) = x^2 + x - 2$

$= (x + \frac{1}{2})^2 - 2 - \frac{1}{4}$

$= (x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$

$= (x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})$

$= (x-1)(x+2)$

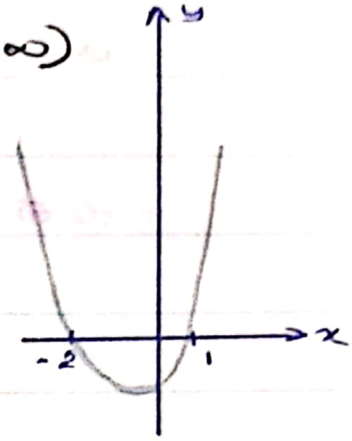
$f(x) = 0$ වන්නේ $x = 1$ හෝ $x = -2$

	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x$
$(x-1)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$(x+2)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Scanned with CamScanner

$f(x) > 0$ වන්නේ, $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

$f(x) < 0$ වන්නේ, $(-2, -1)$



3) $f(x) = x^2 + 2kx + k + 2$ යැයි ගනිමු. මෙහි k යනු තාත්වික නියතයකි.

i) $f(x)$ යන්න $(x-a)^2 + b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු k ඇසුරින් නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. කලනය භාවිතයෙන් තොරව $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින් $y = f(x)$ වක්‍රය,

a) $-1 < k < 2$ නම් x අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටන බව පෙන්වන්න

b) $k < -1$ හෝ $k > 2$ හෝ නම් x අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී කපන බව පෙන්වන්න.

c) $k = -1$ හෝ $k = 2$ හෝ නම් x අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න

ii) $k < -2$ නම් පරාමිති m හි සියලු තාත්වික හා පරිමිත අගයන් සඳහා $y = f(x)m$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය තාත්වික ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව සාධනය කරන්න.

i) $f(x) = x^2 + 2kx + k + 2$

$= (x+k)^2 + k + 2 - k^2$

$= (x-(-k))^2 + k(k+1) + 2$

Scanned with CamScanner

$a = -k$ $b = -k^2 + k + 2$

$= k(1-k) + 2$

හැරුම් ලක්ෂය සඳහා,

$(x-a)^2 = 0$ විය යුතුය.

$x = a$ විට, $f(x) = b$

හැරුම් ලක්ෂය ⟶ (a, b)

* x හි අගය $-\infty$ සිට a දක්වා වැඩි වීමේදී ශ්‍රිත අගය $+\infty$ සිට b දක්වා අඩු වේ.

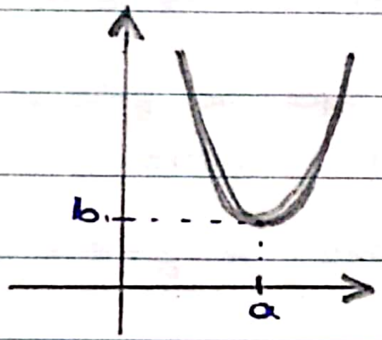
* x හි අගය a සිට $+\infty$ දක්වා වැඩිවීමේදී ශ්‍රිත අගය b සිට $+\infty$ දක්වා වැඩි වේ.

* ∴ හැරුම් ලක්ෂය අවමයකි.

$f(x)$ හි අවම අගය $= b$

$= -k^2 + k + 2$

a)

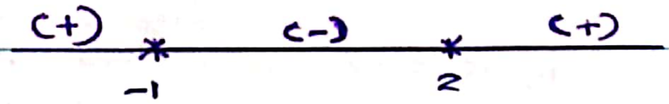


$b > 0$ නම් $f(x)$, x අක්ෂය මුළුමනින්ම ඉහළින් පිහිටයි.

$-k^2 + k + 2 > 0$ නම්,

$k^2 - k - 2 < 0$

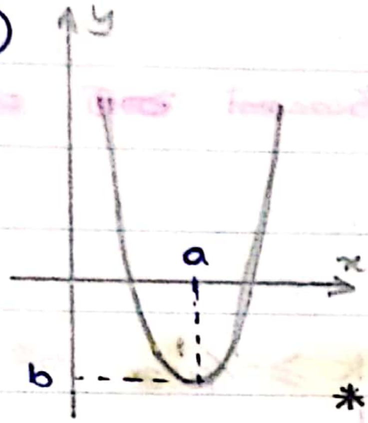
$(k-2)(k+1) < 0$



* ∴ $-1 < k < 2$ වන විට x අක්ෂයට මුළුමනින්ම ඉහළින් පිහිටයි.

Scanned with CamScanner

b)



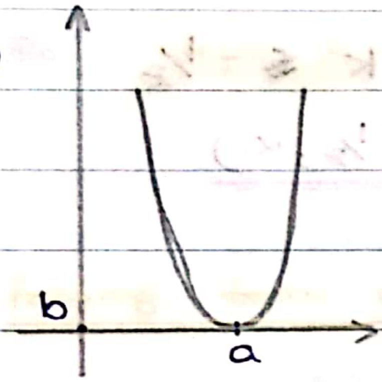
$b < 0$ නම් x අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය 2කදී කපයි.

$-k^2+k+2 < 0$ නම්,

$k^2-k-2 > 0$

* $\therefore k < -1$ හෝ $k > 2$ නම් x අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී කපයි.

c)



$b = 0$ නම් x අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි.

$k = 2$ හෝ $k = -1$දී ස්පර්ශ වේ.

වර්ගජ සමීකරණ

* $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණය,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.

මූල පරිමේය වීමට, $\Delta = (\ )^2$ පූර්ණ වර්ගයක් විය යුතුය.

$\Delta > 0$ නම්, මූල තාත්වික ප්‍රභින්න වේ.

$\Delta = 0$ නම්, මූල තාත්වික සමාන වේ. (සමපාත)

$\Delta < 0$ නම්, මූල අතාත්වික වේ.

$\Delta \geq 0$ නම්, මූල තාත්වික වේ.

Scanned with CamScanner

* b^2-4ac අගය පූර්ණ වර්ගයක් නම් මූල පරිමේය වේ.

* $k^2 \leq \frac{1}{4}$ ලෙස ඇති විට,

$k \leq \frac{1}{2}$ හා $k \geq -\frac{1}{2}$ වේ.

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

* $k^2 \geq \frac{1}{4}$ ලෙස ඇති විට,

$k \geq \frac{1}{2}$ හා $k \leq -\frac{1}{2}$ වේ.

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

වර්ගජ සමීකරණයකට ගත හැකි අගයන්

උදා:- i) $x^2+x-1 = y$ ලෙස ගනිමු.

$$x^2+x-1-y=0$$

$a=1$, $b=1$, $c=-(y+1)$

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= 1-4(1)(-(y+1))$$
$$= 4y+5$$

x තාත්වික වීමට නම්, $\Delta \geq 0$ විය යුතුය.

$$5+4y \geq 0$$
$$y \geq -\frac{5}{4}$$

* ∴ ප්‍රකාශනයට ගත හැක්කේ $-\frac{5}{4}$ හෝ ඊට වැඩි අගයන් පමණි.

Scanned with CamScanner

ඔ) $(x+2) - \frac{1}{(x-1)} = y$ නම්,

$$(x+2)(x-1) - 1 - (x-1)y = 0$$
$$x^2 + x - 2 - 1 - yx + y = 0$$
$$x^2 + (1-y)x + y - 3 = 0$$

$a = 1$, $b = (1-y)$, $c = (y-3)$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (1-y)^2 - 4(1)(y-3)$$
$$= 1 - 2y + y^2 - 4y + 12$$
$$= y^2 - 6y + 13$$
$$= (y-3)^2 + 13 - 9$$
$$= (y-3)^2 + 4$$

x තාත්වික වීමට , $\Delta \geq 0$ විය යුතුය.

$$(y-3)^2 + 4 \geq 0$$

* ∴ ප්‍රකාශනයට $(-\infty, \infty)$ අගයන් සියල්ලම ගත හැක.

* ප්‍රකාශනයට ගත නොහැකි අගයන් නැත.

* $a\sin x + b\cos x = c$ ආකාරයේ සමීකරණ විසඳීම සඳහා,

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$ විය යුතුය.

Scanned with CamScanner

පොදු මූල සම්බන්ධ ගැටලු

* $ax^2+bx+c=0$ හා $px^2+qx+r=0$ යන සමීකරණ දෙකෙහි මූල පොදු නම්,

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$$

$ax^2+bx+c=0$ හා $px^2+qx+r=0$ යන සමීකරණ දෙකෙහි එක් මූලයක් පොදු වේ නම්,

පොදු මූලය α ලෙස ගනිමු,

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \text{——— (1)}$$

$$p\alpha^2+q\alpha+r=0 \quad \text{——— (2)}$$

(1) $\times p$ − (2) $\times a$

$$pb\alpha+pc-aq\alpha-ar=0$$

$$\alpha(pb-aq)=ar-pc$$

$$\alpha=\frac{ar-pc}{pb-aq}$$

* මේ ආකාරයට α^2 ද සොයා යන a, b, c, p, q, r අතර සම්බන්ධයක්ද ලබා ගත හැක.

Scanned with CamScanner

* $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α, β නම්,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ සමීකරණයේ මූල α, β හා γ නම්,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

$$(x+y) = x + y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

* ax^2+bx+c සමීකරණයේ මූල α, β නම්, α^2 හා β^2 මූල වන සමීකරණය,

$$(x-\alpha^2)(x-\beta^2) = 0 \qquad \alpha+\beta = -\frac{b}{a}$$

$$x^2 - (\alpha^2+\beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0 \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \qquad \alpha^2\beta^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

$$= \frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$x^2 - \left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)x + \frac{c^2}{a^2} = 0$$

$$a^2x^2 - (b^2-2ac)x + c^2 = 0$$

විචල්‍ය පරිණාමනය

* α හා β යනු $x^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූල වේ. තවද $c \neq 0$ වේ. α^4 හා β^4 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරින් සොයන්න.
එනයින්, $\frac{\alpha^4}{\beta^4}+1$ හා $\frac{\beta^4}{\alpha^4}+1$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරින් සොයන්න.

$$\alpha+\beta = -b \qquad (x-\alpha^4)(x-\beta^4) = 0$$

$$\alpha\beta = c \qquad x^2 - (\alpha^4+\beta^4)x + \alpha^4\beta^4 = 0$$

$$\alpha^4+\beta^4 = (\alpha+\beta)^4 - 4\alpha^3\beta - 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3$$

$$= (\alpha+\beta)^4 - 2\alpha\beta(2\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2)$$

$$= b^4 - 2c(3\alpha\beta + 2(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta)$$

$$= b^4 - 2c(2b^2 - c)$$

$$= b^4 - 4b^2c + 2c^2$$

Scanned with CamScanner

$\alpha^4\beta^4 = c^4$

$x^2 - (b^4+2c^2-4b^2c)x + c^4 = 0$ —— ②

$x = \alpha^4$ හෝ $x = \beta^4$

$y = \dfrac{\alpha^4}{\beta^4} + 1$ හෝ $y = \dfrac{\beta^4}{\alpha^4} + 1$ ලෙස ගනිමු.

$y = \dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\beta^4}$ $\quad y = \dfrac{\beta^4+\alpha^4}{\alpha^4}$

$y = \dfrac{b^4+2c^2-4b^2c}{x}$ $\quad y = \dfrac{b^4+2c^2-4b^2c}{x}$

$$x = \frac{b^4+2c^2-4b^2c}{y}$$

② ට ආදේශයෙන්

$$\left[\frac{b^4+2c^2-4b^2c}{y}\right]^2 - (b^4-4b^2c+2c^2)\left[\frac{b^4+2c^2-4b^2c}{y}\right] + c^4 = 0$$

$$(b^4+2c^2-4b^2c)^2 - (b^4+2c^2-4b^2c)y + c^4y^2 = 0$$

$$c^4y^2 - (b^4+2c^2-4b^2c)y + (b^4+2c^2-4b^2c)^2 = 0$$

Scanned with CamScanner